

线性代数

-8 课 $Ax=b$ 的可解性和解的结构

一、知识概要

上一节中，我们学到了矩阵引出的空间概念，并学习了 $Ax = 0$ 的求解过程。本节我们进一步探讨，给出求解 $Ax = b$ 的一般求解方法以及可解条件。并总结上节中提到的“秩”对不同形式方程的解的影响。

二. $Ax=b$ 的解

2.1 可解性

这节要介绍解 $Ax = b$ ，这个方程并不一定有解。我们通过一个例子来说明下这个问题：

【例 1】

$$\text{求方程: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ 的可解条件}$$

这里的 A 有一个特点，就是 1, 2 两行之和等于第三行。根据之前学到的技巧(第二课的增广消元法)，列增广矩阵后消元，由于之前写过很多消元步骤了，这里不再赘述。不难得到：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

观察最后一行，代入方程会得到： $0 = b_3 - b_2 - b_1$ 。这一行方程必须成立。因此本方程的可解条件为： $0 = b_3 - b_2 - b_1$ 。

再看这个条件： $0 = b_3 - b_2 - b_1$ ，它反映了一种线性组合特点，即 b 向量的第三个分量是前两个分量之和。反过来看 A 矩阵本身特点，发现 A 矩阵第三行也是前两行的和。记得之前我们说过， $Ax = b$ 有解的条件是 b 在 A 的列空间中。这个例子再一次印证了这个条件。

我们从本题中得到一个启示： $Ax = b$ 有解的条件：

- 列空间角度：

当且仅当 b 属于 A 的列空间时成立。

- 线性组合角度：

b 必须是 A 各列的线性组合。

- A 矩阵本身变换角度：

如果 A 的各行线性组合得到零行（如例【1】），那么对 b 取相同运算方式，必将得到自然数 0。

2.2 完整解方程过程

接下来我们介绍通解，特解，并借此求解方程 $Ax = b$ 。

我们接着【例 1】开始聊。设 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 满足可解条件，我们来彻底求解方程。

首先介绍一下**通解**概念。什么是通解呢？就是满足这个方程的所有解。将“无穷解”用一种形式表达出来。

对于 $Ax = b$ 这个方程，**通解 = 矩阵零空间向量 + 矩阵特解**。这很好理解，矩阵零空间向量代入方程最后结果等于 0，所以它不会影响等式，而是把方程的解向量扩展到一个类似子空间上，使我们求出的解更具有普遍意义。而矩阵零空间向量我们之前介绍过，那么我们只需要关注**特解怎么求**就好了。

上一节中我们求解 $Ax = 0$ 方程的特解时，分别将自由变量赋值为 0/1，这是因为最特殊的赋值方式：**自由变元全部赋值为 0** 的方式在 $Ax = 0$ 中行不通，因为这样的赋值方式在 $Ax = 0$ 中得到的是零向量，但是我们最后求出的通解为：

$$x = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

只要将系数全定为 0 就可以得到“零向量”这个解。很明显在解 $Ax = 0$ 时不能将自由变元全赋为 0。

但是 $Ax = b$ 这个方程不同，只要 b 不是 0，我们就可以将**自由变元全部赋值为 0**。本例中我们使用此方法得到特解：

以下为完整过程：

我们让自由变元 $x_2, x_4 = 0$, 回代方程得到:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 3\end{aligned}$$

解得特解为: $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

通过上一节的知识我们很容易求出 $Ax = 0$ 对应的 A 在零空间中的解:

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以最后的结果为: **特解 + 零空间任意向量。**

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这个解集在几何角度的解释为: R^4 上的一个二维平面, 很显然, 这个解集无法构成一个向量空间, 因为解集中连零向量都没有。也就可以理解为: 解集在空间中表现为 R^4 中的一个不过原点的平面。

三. $m \times n$ 的矩阵 A 的秩与解的关系

很明显在上面我们消元求 $Ax = b$ 的过程中, 矩阵 A 的秩对最后解的形式有至关重要的影响, 下面我们就总结一下这方面的问题。

3.1 列满秩

即 $m \times n$ 的矩阵 A 中, 秩 $R = n < m$ 。例如:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 2 = n < m$$

消元后 A 为 $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ 形式。我们发现这样的矩阵没有自由变元, 即 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 都为

主元。也就是说这样的矩阵零空间向量中只有一个向量——零向量。这样的矩阵 A 构造的方程 $Ax = b$ ，要么不满足可解条件，要么只有一种符合对应方程组的解。

解最后只有两种情况：

- 有解且唯一
- 无解，不满足可解条件 不可能没有解？

3.2 行满秩

即 $m \times n$ 的矩阵中，秩 $R = m < n$ 。例如：

$$m \begin{matrix} & & n \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & R = 2 = m < n \end{matrix}$$

上一节中介绍过，这样的矩阵消元之后会是 $[I \ F]$ 形式（I 表示单位阵，F 表示其他部分），很明显由这样的矩阵构成的方程 $Ax = b$ ，最后肯定是无穷多个解，因为该种矩阵中，永远有自由变元 $(n - R)$ 个。

3.3 行列皆满秩

当 $m \times n$ 矩阵 A 是方阵时，即有 $m = n$ 时，那么秩 $R = m$ 时， R 也必 $= n$ 。例：

$$m \begin{matrix} & & n \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right] & R = 2 = m = n \end{matrix}$$

这种矩阵经过消元，必可以化为单位阵 I，自由变量个数为 0。只能得到一个全是主元的方程组。所以这种矩阵构成的 $Ax = b$ 方程最后只能有唯一解。

3.4 不满秩

秩 $R < n$ ，而且 $R < m$ 时，A 矩阵不满秩，此时 A 可化简为 $\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 形式，最后化简结果中有 0 行。如【例 1】中的矩阵，b 的分量与零行牵扯出了可解条件的存在。所以这样的矩阵 A 所构成的 $Ax = b$ 方程解有两种情况：

- 不满足可解条件（零行导致的可解条件）
- 解无穷多个（特解 + 零空间所有向量）。

3.5 总结

观察以上情况，自由变量总为 $(n-r)$ 个，所以先判断自由变量个数可以初步判断 $Ax = b$ 的解的结构：

$$\begin{cases} n - r = 0 \text{ 时, 方程即为唯一解或不满足可解条件而无解。} \\ n - r \neq 0 \text{ 时, 方程为无穷多解或不满足可解条件而无解。} \end{cases}$$

而可解条件的产生是由于 A 消元之后的 0 行导致的, 所以再判断 A 消元之后会不会有零行产生就可以确定解的结构:

$$\begin{cases} \text{消元后有零行产生时, 需要考虑方程是否满足可解条件。} \\ \text{消元后没有零行时, 方程不用考虑可解条件的影响。} \end{cases}$$

四、学习感悟

本节基于上一节中零空间的求解, 延伸介绍了 $Ax = b$ 的一般解法。并从 A 矩阵秩的角度探讨了秩与方程解的结构之间的联系。至此我们已经学完了解方程 $Ax = b$ 形式矩阵方程的所有问题, 在这个过程中, 我们需要注意的无非就是自由变元个数, 以及通解和特解问题, 整体而言, 这部分重在求解流程以及如何理解。正确理解向量空间之后, 理解这种矩阵方程问题也就不是什么难事了。