

## 一、知识概要

上节末尾我们介绍了矩阵空间，这是一种延伸的向量空间。这节我们从矩阵空间谈起，介绍矩阵空间的维数，基等问题。渗透一些微分方程与线性代数之间的联系，并介绍秩为 1 的矩阵特点。

## 二. 矩阵空间

还是上一节中的问题，将所有  $3 \times 3$  的矩阵都看做“向量空间”中的元素，很明显，由所有  $3 \times 3$  矩阵构成的集合中，矩阵之间加法与数乘矩阵都是封闭的，所以所有  $3 \times 3$  矩阵构成的集合  $M$  可以被称为空间。

上节中介绍过， $M$  有两个基本的子空间：

1. 对称矩阵  $S$
2. 上三角矩阵  $U$

上面两个矩阵集合中，加法封闭与数乘封闭都很容易得到证明。

而  $S$  与  $U$  空间相交，得到另一个子空间：对角阵  $D$ 。

### 2.1 基与维数

最明显的就是  $M$  的基，对任何一个  $3 \times 3$  矩阵都适用的基，类似  $R^9$  的基：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与  $R^9$  的向量空间类似，只不过这里矩阵自身的性质决定了基的存在状态。所以  $M$  的维数为 9。

接下来要讨论的是对称矩阵  $S$  与上三角矩阵  $U$

$S$  与  $U$  的基也很好写出，让每个元素都等于一次 1 就可以了。一并给出：

对称阵  $S$  的基有 6 个：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上三角矩阵  $U$  的基有 6 个：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以  $S, U$  维数都是 6。这里主要想强调的是矩阵基与向量形式上的不同。

再看对角阵 D，明显只有三个基： $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，即对角

阵维数为 3，基正好为 S 与 U 的交集。也可以写为： $\dim(S \cap U) = 3$ 。

聊完交集，再考虑一下并集，之前向量空间中也介绍过，这样的两个子空间的并集不是向量空间，因为两个向量加和会脱离范围。ok，那么不谈交集，怎样才能使两个空间的和为一个向量空间呢？

这个空间叫做： $S+U$ ，它与并集的不同就在于，并集只包含了 S 与 U，而  $S+U$  集合包含了它们两个的线性组合，就是任意对称阵加上任意上三角矩阵的和都包含于这个集合里。另外，很容易看出来，这个集合就是 M，所以  $S+U$  的维数是 9。

联系上面的所有维数，有这样一个等式：

$$\begin{aligned} \dim(S) + \dim(U) &= \dim(S \cap U) + \dim(S+U) \\ 6 + 6 &= 3 + 9 \end{aligned}$$

## 2.2 微分方程

同样的“空间”概念还适用于很多地方，这样的线性空间内元素不一定是向量，矩阵，还可以是方程的解。

例如：解微分方程  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

只考虑实数范围，很明显这个微分方程有两个特解： $y = \sin x$  与  $y = \cos x$ 。而所有的解就是这两个特解的线性组合： $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 。

这很类似于零空间，也就是说我们将这些解看做线性空间中的元素也可以。所以我们可以称其为解空间。其中的元素是解，满足线性运算封闭条件。

那么从空间的角度出发，这个解空间两个基就是  $\cos x$  与  $\sin x$ ，其线性组合构成了解空间，所以解空间维数为 2。

## 三. 秩一矩阵

这里重点提一下秩为 1 的矩阵，因为它易于分解。

### 3.1 秩一矩阵的优点

例：矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

很明显 A 秩为 1，可以被分解为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 。这就是秩一矩阵的优点，每一行都是第一行的几倍。可以被分解为一列乘一行的形式。都可以写为： $A = UV^T$

秩一矩阵的另外一个优点是它可以“搭建”其他矩阵，比如秩为 4 的矩阵，通过四个秩一矩阵就能搭建出来。具体过程类似于矩阵乘法中的“列乘行”形式，通过一系列一行搭出一个矩阵。

### 3.2 空间角度解释同秩矩阵

那么从空间角度看，所有秩为 4 的矩阵构成的集合 M，能称之为空间么？肯定不是。其中都不包含零向量。另外，因为有这样一性质存在：

$$R(A+B) \leq R(A) + R(B)$$

这就意味着 M 这个集合对加法也不封闭。两个秩为 4 的矩阵相加，结果的秩可能大于 4。所以所有秩为 4 的矩阵集合并不能构成空间。同理，秩为 1 的矩阵集合也不能构成空间。

### 3.3 子空间的转化

我们通过这样一个例子再加深一下对子空间的印象：

【例】四维空间中的向量都有四个分量  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ ，设 S 为一个集合，其中的向量

都满足： $v_1+v_2+v_3+v_4=0$ 。则 S 是不是一个子空间？若是，那么其维数是多少？

解：

S 显然是一个子空间， $v_1+v_2+v_3+v_4=0$  这个特点，对加法和数乘都封闭。而且 S 中肯定有零向量，故 S 是一个子空间。

假设有一矩阵 A， $A = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ，由 S 中 v 的特殊性质，很明显可以得到：

$$Av = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = v_1+v_2+v_3+v_4 = 0$$

这样一来，我们就通过 A 构造了一个  $Ax = 0$  的方程，将 S 空间转化为了 A 的零空间。问题也转化为求此零空间的基和维数。

矩阵 A 的秩 r 为 1，列数 n=4，主元只有一个，自由变元有三个。

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

因此维度为  $n-r = 3$ ，S 的零空间是三维空间。其基为  $Av = 0$  的三个特解

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

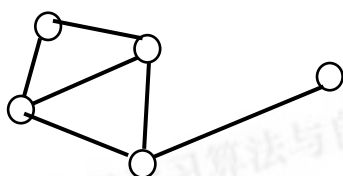
这下我们就解决了这个问题，接下来回顾 A 的列空间与左零空间：

$A = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ，很明显它的列空间的基就是  $R^1$  的基，其线性组合构成的空间就是  $R^1$ 。所以 A 列空间即为  $R^1$ 。

左零空间  $N(A^T)$ ：A 的左零空间即是线性组合各行得到零向量的方式，很显然，这个 A 的左零空间只有零向量。

#### 四. 小世界图

这部分是对下一节“图与网络”的引出，主要渗透一下图与矩阵的关联。有这样一个图：



这个图包括五个节点和六条边，可以用一个  $5 \times 6$  的矩阵来表示其中的所有信息。具体内容我们下节课再说。

另外，大家应该也听说过“六度分割理论”，任何两位素不相识的人之间，通过一定的联系方式，总能够产生必然联系或关系。这个概念即是把人抽象成点，将联系抽象为图。

这一节是渗透一些关于图与矩阵之间会有联系的思想，具体内容下节再谈。

#### 五. 学习感悟

这一节中主要介绍了线性空间，一并介绍了类似于矩阵空间，解空间这一类空间的存在。另外，秩一矩阵将我们之前学习的矩阵乘法列乘行方式联系起来，便于分解，可以搭建矩阵。