# 线性代数

**-20 课　克莱姆法则、逆矩阵、体积**

## 一、知识概要

上一节中我们介绍了行列式的求法，这一节强调下行列式的应用，包含三个方面：克莱姆法则、逆矩阵、体积。这三部分内容会让我们对行列式有更深层次的认识。

## 二．逆矩阵公式

这里给出逆矩阵公式；

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

这里的矩阵 C 代数余子式矩阵，即其中各个对应元素为其对应的代数余子式。我们这里称这个由代数余子式组成的矩阵$C^T$为伴随矩阵。

例：

二阶逆矩阵公式为:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



再看这个公式的结构：

nxn 矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

各元素由 n-1 个乘积组成

n 个元素的乘积

- 验证公式的正确性：

由　$AA^{-1} = I$

故：$AA^{-1} = A\frac{1}{|A|} C^T = I$

即需要验证：

$$AC^T = |A|I$$

将其展开观察：

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

由于对 C 进行了转置，导致 A 每一个行向量与$C^T$对应列向量做内积后得到的正是 A 的行列式值，相当于行列式按每一行展开的逆运算。

所以可以得到：

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

这里有一个问题，那第一行为例，为什么$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$这个行向量在和不属于这行元素的代数余子式构成的列向量相乘时，得到的结果为零呢？也就是为什么$\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$中除对角线外，其余元素都为零呢？

很简单，就以 A 的第一行和$C^T$的第二列为例：

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ \dots \\ C_{2n} \end{bmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}$$

我们构造一个新矩阵来表现这个结果：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

这个矩阵前两行相同，将这个矩阵按第二行展开求行列式，即为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}$$

同时，由于这个矩阵前两行相同，故其行列式为 0。
这样就得到了：

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n} = 0$$

其余位置以此类推，所以$\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$中除对角线，其余位置均为 0。

逆矩阵公式帮助我们了解了另一种原矩阵与逆矩阵之间的关系，可以理解原矩阵的变化对逆矩阵的影响。

## 三、克莱姆法则

基于上面的逆矩阵公式，我们可以找到另一种寻找方程的解的方式，也就是由可逆矩阵 A 构成的方程 Ax = b，这里不用消元法来解：

$$Ax = b$$

$$\leftrightarrow \quad x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} C^T b$$

这时，注意$C^T$ b 这个形式，展开就是每一个代数余子式 C 乘上 b 的各个分量。余子式乘数字，这让我们想到了行列式。那么这个$C^T$ b 构成的一组行列式是什么样的呢？

联想上面我们构造矩阵求$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n} = 0$的过程，不难想到，只需将 A 中$C_i$对应列$A_i$替换为 b，即为该列对应行列式，我们设其为$|B|$。

就有下面的式子：

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|B_3|}{|A|} \cdots\cdots x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

由 C $= \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$，上面 x 的每一个分量都是对应的$C_i$b 得到的，构造新矩阵，计算行列式来求上面各个分量的对应$|B_i|$。

其中：$|B_1| = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \dots \\ C_{1n} \end{bmatrix} b = \begin{vmatrix} b & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的第一列展开。

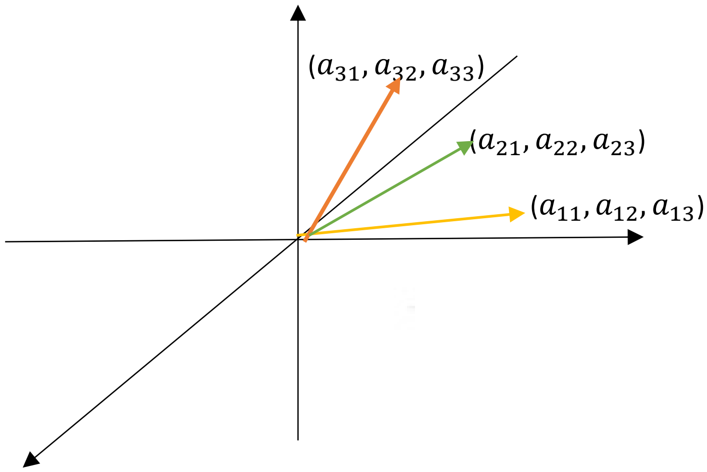
$|B_2|$，$|B_3|$ $\cdots$ 以此类推。

就这样，我们得到了另一种解方程 Ax = b 的方法。即使用逆矩阵公式，再构造新矩阵计算分母上$C^T$不同列的分量与 b的内积，最后得到 x 的各个分量。进而解出 x 的值。

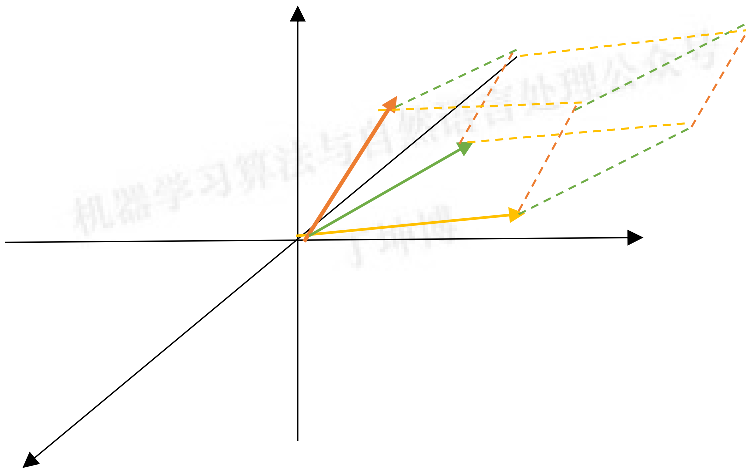
## 四、体积

直接给出应用：行列式的值是一个六面体的体积。

假设 A $=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，对应三个向量反映在三维坐标下：




这三个向量张成了一个平行六面体，而 A 的行列式的绝对值即为其体积。



行列式的值有正负，所以该六面体的体积即为行列式的绝对值。而正负号的作用是告诉我们这个立体是左手系的还是右手系的。因为当我们调换这个立体的两条边之后，我们得到的会是不同系下的立体，其体积不会变，但是旋转顺序变了。

研究几个特别的矩阵：

（1） 单位阵 I：

很明显，单位阵对应的就是三个边长为 1 的立方体，朝向即是各坐标轴的正方向。

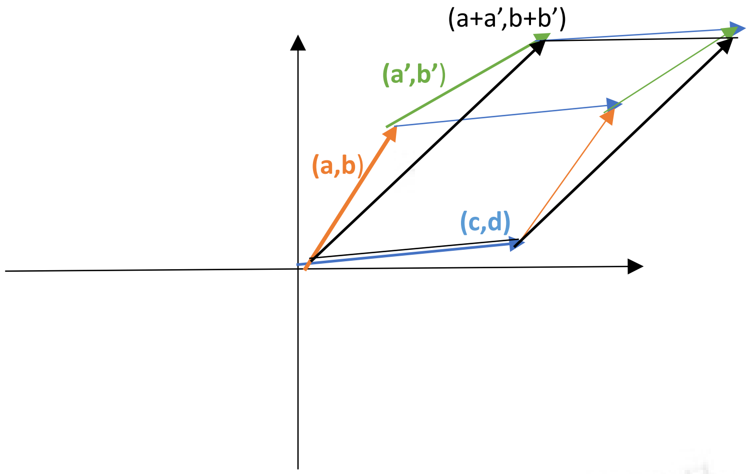
（2） 正交阵 Q：

还记得我们之前介绍的正交阵 Q，它除了正交这个性质之外，还有一点，即各向量长度均为 1（$Q^TQ = I$）。所以 Q 构成的立体也是三个边长为 1 的立方体，只是体现在坐标中时与 I 对应的立体位置不同。

还记得上一节中介绍的行列式有三个基本的性质(1,2,3)，这里性质一，二和三(1)很好证明，主要看性质三(2)：$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$。

这部分内容课上并没有证明，我在网上找到了这部分证明：

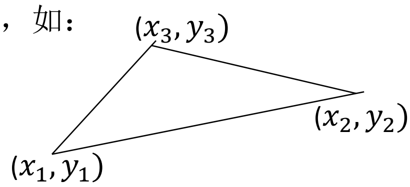
以二维为例：




从上面的二维图像可以看出来，$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix}$对应的面积和$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的面积与$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$的面积的和相等。高维类似，即得到行列式的性质三（2）。

有上面的启发，求过原点的三角形面积就可以用行列式求解。$S = 1/2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。

而不过原点的三角形，如：




这个时候要构造的行列式就是：$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$。此三角形面积即为 $1/2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$。

我们计算这个行列式的时候会做一系列消元，例如 2 行-1 行，3 行-1 行消去 1。这一系列减法相当于将三角形移到原点位置，这样行列式求解便有效了。

## 五、学习感悟

这一节主要是行列式的应用，其中比较重要的是逆矩阵公式与行列式计算体积。而克莱姆法则解方程的过程没有消元法更有效，对 Ax = b 方程，更推荐用消元法来进行求解。