线性代数

-21 课　特征值和特征向量

一、知识概要

本节课讨论了特征值与特征向量。主要目的是掌握求特征值的技巧并对一些特别的情况进行说明。本节内容比较基础。

二．特征值与特征向量

2.1 释义

首先给出特征值与特征向量的定义：对矩阵 A，若有

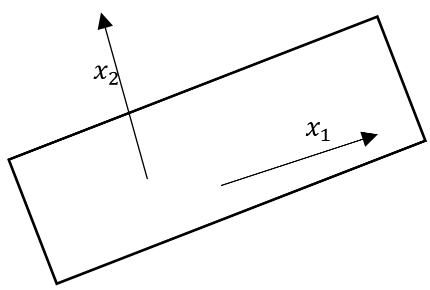
$$Ax = \lambda x$$

则 x 为矩阵 A 的特征向量，λ 为矩阵的特征值。那么如何理解特征值与特征向量所代表的意义呢？

我们来看 Ax 这个式子，对于不同的向量 x，Ax 这个式子像是一个函数，输入一个向量 x，则输出一个向量 Ax。而在我们输入的众多向量 x 生成的 Ax 中，会有这样的向量 Ax，它们平行于 x，我们即用上面这个式子：Ax = λx 来表示这个关系。

特别注意下特征值为 0 的情况。此时会有：AX = 0。我们可以发现 A 如果是不可逆矩阵，则正好满足此性质。

我们再研究一下之前提到过的投影矩阵，如果投影矩阵是 A 的话，那么它的特征值是多少呢？



我们取较为特殊的向量：

（1） 如果对任意平面上的x_1来说，投影矩阵根本不会影响它的大小，所以就有：$Ax_1 = x_1$恒成立。此时得到一个 λ：1。

（2） 如果对垂直于平面的任意x_2来说，投影矩阵作用在此向量之后始终会有：$Ax_2 = 0$ 恒成立。如此即得到第二个 λ：0。

2.2 求解方法

接下来我们给出特征值，特征向量的一般求解方法。我们对方程进行一些处理：

- $Ax = \lambda x \rightarrow (A-\lambda I)x = 0 \rightarrow A-\lambda I$ 是不可逆矩阵 $\rightarrow A-\lambda I$ 行列式为 0

如上即为求解特征值的步骤。n 阶一共应该有 n 个特征值。

求解特征向量只需要取求解出的一个特征值 λ，此时 $A-\lambda I$ 是一个不可逆矩阵，利用 $(A-\lambda I)X = 0$ 求解零空间中的向量即为矩阵的特征向量。

【例1】 求矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征向量与特征值。

沿袭我们上述思路，构造矩阵 $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$。求解行列式 = 0 即可。

解得两个特征值：$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 4$。

求解特征向量：直接代入特征值消元。

$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，即：$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = 0$，解得 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，即：$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$，解得 $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

注：在这里注意一点，我们很容易发现：$\lambda_1 + \lambda_2 = 6$，正好是 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 对角线上元素的和，称为"**迹**"。**特征值之和与迹相等**，这也是一个重要的定理。而且又有 $\lambda_1 \lambda_2 = 8$，即为行列式 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的值，这也是一个普遍规律，**特征值之积为 A 矩阵行列式的值**。

【例2】 在例 1 的基础上，如果矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 3I$，那么它的特征值，特征向量将如何变化？

首先，列出这部分核心的等式：$Ax = \lambda x$，则根据题意，改变后的方程变为：$(A+3I)x = \lambda x + 3x = (\lambda+3)x$。也就是说，新的特征值变为 $\lambda+3$，而对应的特征向量不会改变，因为等式两边同等的有 3Ix 与 3x。不会影响特征向量的值。

2.3 特殊情况说明

我们通过两个例题说明下这部分求解中可能遇到的特殊情况。

【例 3】旋转矩阵 Q 使得每个向量旋转 90°，记 Q = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。（$\begin{bmatrix} cos90° & -sin90° \\ sin90° & cos90° \end{bmatrix}$），求解特征值与特征向量。

思路：

这个问题我们如果从迹与 A 行列式的角度分析，得到：$\lambda_1 \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

这样特征值不存在么？我们换一种思路：使用 Qx = λx 这个式子，化简求解 Q - λ_i的行列式的值，使其为 0。得到λ^2+1 = 0，解得λ为虚数：i 与-i。代入之前的方程，完全满足。

启示：我们发现 Q 是反对称矩阵（ A^T = -A），而我们之前求的都是对称矩阵的特征值，也就是说，对称矩阵的特征值为实数，而反对称矩阵的特征值为虚数，这是两个极端。

【例 4】A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，求特征值与特征向量。

思路：

这是个上三角矩阵，求解 A-λI 行列式时会发现，$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，这时的特征向量只会有一个，也就是说，三角矩阵的结构的特殊性导致了其行列式为对角线上元素，而如果对角线上两个元素相等，那么就会造成特征向量短缺情况。

三、学习感悟

本节内容不是很困难，重点在于特征值与特征向量的求解，其实只要使用 A-λx 求解就没错，特别注意一下虚数情况就好了。重点是理解特征值如何求解以及特征值到底代表着什么。