线性代数

-25 课　复习 2

一、知识概要

本节为习题课，主要回顾了下 14~24 课的学习内容，并通过习题进行复习。

二. 复习

2.1 回顾知识

2.1.1. 投影部分:

首先，我们学习了正交性，给出了矩阵 Q = $[q_1 \quad \cdots \quad q_n]$，当 q 都是标准正交基时，我们称 Q 是正交矩阵，此时有性质：QQ^T = I　只有自己乘以自己才为1，其余均为0

然后我们还学习了投影，进而解决了 Ax = b 问题，使用最小二乘拟合，当方程 Ax = b 无解时，寻找最优解。

我们还介绍了 Gram-Schmidt 正交化方法，将线性无关的向量投影到另一组向量上，新得到的向量正交，再进行单位化，将基变为标准正交基。

2.1.2. 行列式部分:

首先介绍了行列式的十个性质，其中最重要的是 1,2,3；而后面的性质都是由前三个性质导出。另外，行列式展开式有 n！项，同时展开时注意符号问题。

还介绍了代数余子式公式，这也是我们计算行列式的简便方法之一。这也让我们得到了逆矩阵公式：$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$。

2.1.3. 特征值部分:

首先介绍了特征值与特征向量，Ax = λx 方程，以及求特征向量的方程。另外，如果矩阵有 n 个线性无关的特征向量，那么将它们构成矩阵 S，可以用来将矩阵进行对角化处理：A = $S \wedge S^{-1}$。同时，可以使用对角化公式计算矩阵幂的问题。然后引入了许多应用，例如微分方程之类的问题。

2.2 例题

【例 1】现有 $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，试找到向量 a 所在直线的投影矩阵并讨论其性质：

（即对于任意的向量 b，找到可以将其投影到该直线上的投影矩阵）

解：

根据投影矩阵的公式：

$$P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

可得投影矩阵为：

$$P = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

很明显这是一个不可逆矩阵，第一列，第三列均是第二列$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$的 2 倍，所以这个矩阵 P 秩为 1，列空间为 1 维。所以对应的零空间为 2 维的，这意味着它的两个特征值都为 0，最后一个特征值由矩阵的迹可得为：$\frac{1}{9}$(4+1+4) = 1。

求特征值 1 对应的特征向量：

Px = x

由于 P 是投影矩阵，所以联想实际意义，只有 P 作用于 a 向量上时，可以得到 Pa = a，此时 P 矩阵对 a 无影响。所以其对应特征向量为 a。

【延伸】

将矩阵 P 引入差分方程，题目如下：

方程：$u_{k+1} = Pu_k$，其对应初值为$u_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$，求解$u_k$？

解：

首先看一下这个方程中的 P 是否有什么特殊性质，很明显，P 代表投影，这样的话P^K与 P 单独作用在一个向量上的效果并没有不同。所以，现在求出投影一次后的u_0至关重要：

将 P 打开，利用已知$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，求得：

$$u_1 = Pu_0 = a\frac{a^T u_0}{a^T a} = a\frac{27}{9} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

由于矩阵 P 是投影矩阵，有结论：

$$u_k = P^k u_0 = P u_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

复习一下之前我们学习差分方程时，P 矩阵不是投影矩阵时，我们是使用特征值特征向量展开来求解的：

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$u_k = A^k u_0 = c_1 {\lambda_1}^k x_1 + c_2 {\lambda_2}^k x_2 + \cdots + c_n {\lambda_n}^k x_n$$

而在本题中使用这个公式：对于这里的投影矩阵 P，有两个特征值为 0，一个特征值为 1，于是前两个$c_1 {\lambda_1}^k x_1 + c_2 {\lambda_2}^k x_2$可以舍弃，最后一部分的 $1 c_3 x_3$可以通过初值u_0以及三个特征向量x_1，x_2，x_2来确定。

【例 2】给定一组点（1,4）（2，5）（3,8），尝试将其拟合到一条过原点的直线上

解：

先设直线 $y = Dt$，只有一个未知数，一个自由度

列出矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

记作：AD=b

下面求解最优的 D：

之前学习的内容，最优方程为：

$$A^T A \hat{D} = A^T b$$

（本题中 AD = b 对应前面介绍过的 Ax = b）

解得：

$$\hat{D} = \frac{38}{14}$$

【例 3】 已知：$a_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，求解一组正交基

分析：

将第一个向量设为 A，求解正交于其的一个向量 B。

以a_2作为模板，可以将 B 表示为a_2减去其在a_1上的投影的形式——这样就可以保证 B 与a_1(即 A)相垂直了

$$B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{a_1^{\ T}a_2}{a_1^{\ T}a_1}a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{6}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

【例 4】给定一个 4x4 矩阵，其特征值为λ_1，λ_2，λ_3，λ_4

（1）特征值在满足什么条件下，矩阵是可逆的？

答：

根据我们之前的学习，只有特征值均不为 0 时，矩阵才可逆。否则的话 Ax = 0x 就会有非零解。 行列式等于特征值相乘

（2）$|A^{-1}|$的行列式等于多少？

答：

根据$|A||A^{-1}|$ = 1 以及特征值之积为 A 矩阵行列式的值这两个定理，可知

$$|A^{-1}| = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$$

（3）矩阵 A+ I 的迹是多少？（迹等于矩阵特征值之和）

答：

I 为四阶单位阵，加上 I 使得 A 的迹在基础之上加 4。结果为：

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4$$

【例 5】已知一矩阵：$A_4=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，求 A_n 的行列式 D_n？

解：

利用代数余子式的知识，类比于此类矩阵在四阶时的特征，不难得到：

$$D_n=D_{n-1}-D_{n-2}$$

（如果忘了怎么推导出来的话见 19 课末例题）

19 课中我们只讨论到了上面这个递归式，随着我们的进一步学习，其实差分方程在这里也可以有所作为，下面我们将这个二阶递归式表示为方程：

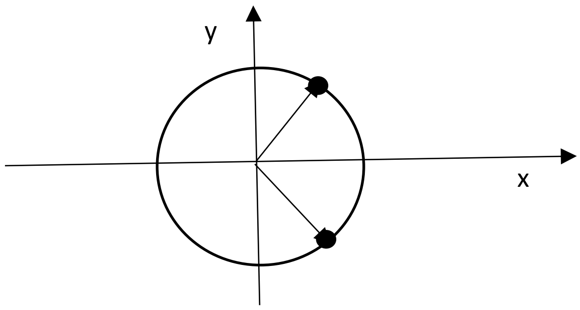
$$\begin{bmatrix}D_n\\D_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{n-1}\\D_{n-2}\end{bmatrix}$$

（这个构造过程这里不再细讲，见 22 课裴波那切数列例题构造方法）

利用$|A-\lambda I| = 0$，求$\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$矩阵的特征值：

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

观察这两个特征值，发现其模均为 1，在复平面上表示位于单位圆上的两个点，示意图如下：



由欧拉公式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

还可以求得对应的表示为：$e^{\frac{\pi}{3}i}$、$e^{\frac{-\pi}{3}i}$。

【问题】矩阵本身以及特征值与稳定性有何联系？

分析：

矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$的 6 次幂的特征值分别是 1 和 1，因此 A 的 6 次方等于单位阵 I

或者说，这些特征值的 6 次幂均等于 1。这也解释了为什么这个形式的矩阵 A 行列式的变化周期为 6。**因此该数列周期变化，既不收敛，也不发散。**

【例 6】有一种矩阵：$A_4 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 0 & 3\\0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix} = {A_4}^T$，类比：$A_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$。

• (1) 求投影到A_3列空间的投影矩阵

解：

由投影公式：

$$P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

代入矩阵A_3，可以很快得到答案。

这里要注意一点，A_3是不可逆矩阵，其列空间是一个平面，所以投影矩阵实际上是将另一个空间投影到一个平面上。

• (2) 求A_3的特征值和特征向量

解：

令行列式$|A_3-\lambda I|=0$，解得特征值为 0，$\pm\sqrt{5}$。

再代入$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\mathrm{x} = 0$可解出特征向量。

• (3) 求投影到A_4列空间的投影矩阵

解：

如果A_4矩阵可逆，则其列空间就是R^4。因此如果确定了投影矩阵是可逆矩阵，那么其投影矩阵很简单：即为单位阵 I，因为此时向R^4不影响向量本身。

A_4矩阵对应的行列式值为 9，于是矩阵可逆。故：其投影矩阵为 4 阶单位阵

△此外，结合A_3可提出猜想：此种规律的矩阵，奇数号矩阵都是奇异（不可逆）的，偶数号矩阵都是可逆的。

三. 学习感悟

这一章学习了很多知识，这些基本求解方法必须掌握，因为它们是我们进一步学习更深层次内容的基础。尤其是特征值的求解，投影矩阵的理解这些东西。