4 【選択問題】計算理論

配点：(1) 20, (2) 25, (3) 30, (4) 25, (5) 25

文脈自由文法 (context-free grammar) G を (V, T, P, S) で表す．各要素は以下の通りである．

- V: 変数 (variable) の有限集合 (finite set).
- T: 終端記号 (terminal symbol) の有限集合.
- P: 生成規則 (production rule) の有限集合.
- $S \in V$: 開始記号 (start symbol).

空スタックによる受理 (acceptance by empty stack) を行うプッシュダウンオートマトン (pushdown automaton) PDA を $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q, Z)$ で表す．各要素は以下の通りである．

- Q: 状態 (state) の有限集合.
- Σ: 入力記号 (input symbol) の有限集合.
- Γ: スタック記号 (stack symbol) の有限集合.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$: 遷移関数 (transition function). (ε は空文字列 (empty string) を，$\mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ は $Q \times \Gamma^*$ のべき集合 (power set) を表す．)
- $q \in Q$: 初期状態 (initial state).
- $Z \in \Gamma$: 開始記号.

記号 a, 文字列 (string) w に対し，w に a が現れる回数を $n(a, w)$ とする．言語 (language) L_1 を以下のように定義する．

$$L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; |n(0,w) - n(1,w)| = 1 \right\}$$

(1) 文脈自由文法 $G_1 = (\{S, A\}, \{0,1\}, P_1, S)$ は，L_1 を生成する．P_1 は以下の通りである．

$$S \to A0A, \quad S \to A1A, \quad A \to 0A1A, \quad A \to 1A0A, \quad A \to \varepsilon$$

G_1 があいまい (ambiguous) であることを示せ．

(2) L_1 を生成し，かつ，ε-規則 (ε-production) を持たないように，文脈自由文法 $G_2 = (\{S, A\}, \{0,1\}, P_2, S)$ を定めたい．P_2 を示せ．

(3) L_1 を認識するように，空スタックによる受理を行うプッシュダウンオートマトン $PDA_1 = (\{p,q\}, \{0,1\}, \{X,Y,Z\}, \delta_1, q, Z)$ を定めたい．
$\delta_1(q,0,X) = \{(q,XX)\}$, $\delta_1(q,1,Y) = \{(q,YY)\}$, $\delta_1(q,\varepsilon,X) = \delta_1(q,\varepsilon,Y) = \{(p,\varepsilon)\}$, $\delta_1(q,\varepsilon,Z) = \emptyset$, $\delta_1(p,0,X) = \delta_1(p,0,Y) = \delta_1(p,0,Z) = \delta_1(p,1,X) = \delta_1(p,1,Y) = \delta_1(p,1,Z) = \delta_1(p,\varepsilon,X) = \delta_1(p,\varepsilon,Y) = \emptyset$, $\delta_1(p,\varepsilon,Z) = \{(p,\varepsilon)\}$ とする．$\emptyset$ は空集合 (empty set) を表す．

$\delta_1(q,0,Y)$, $\delta_1(q,0,Z)$, $\delta_1(q,1,X)$, $\delta_1(q,1,Z)$ をそれぞれ示せ．

(q, ε)　(p, ε)　(q, ε)　(p, ε)

(次ページに続く)

X用来记0
Y用来记1

$|n(0) - n(1)| = 1$

1 −1 1

−1 1 −1

(4) L_2 を，以下の条件をすべて満たす任意の正則言語 (regular language) とする．

- $L_2 \subseteq L_1$．
- L_2 の要素数は無限である．
- 任意の $w \in L_2$ について，$ww'w \in L_2$ となる $w' \in L_2$ が存在する．

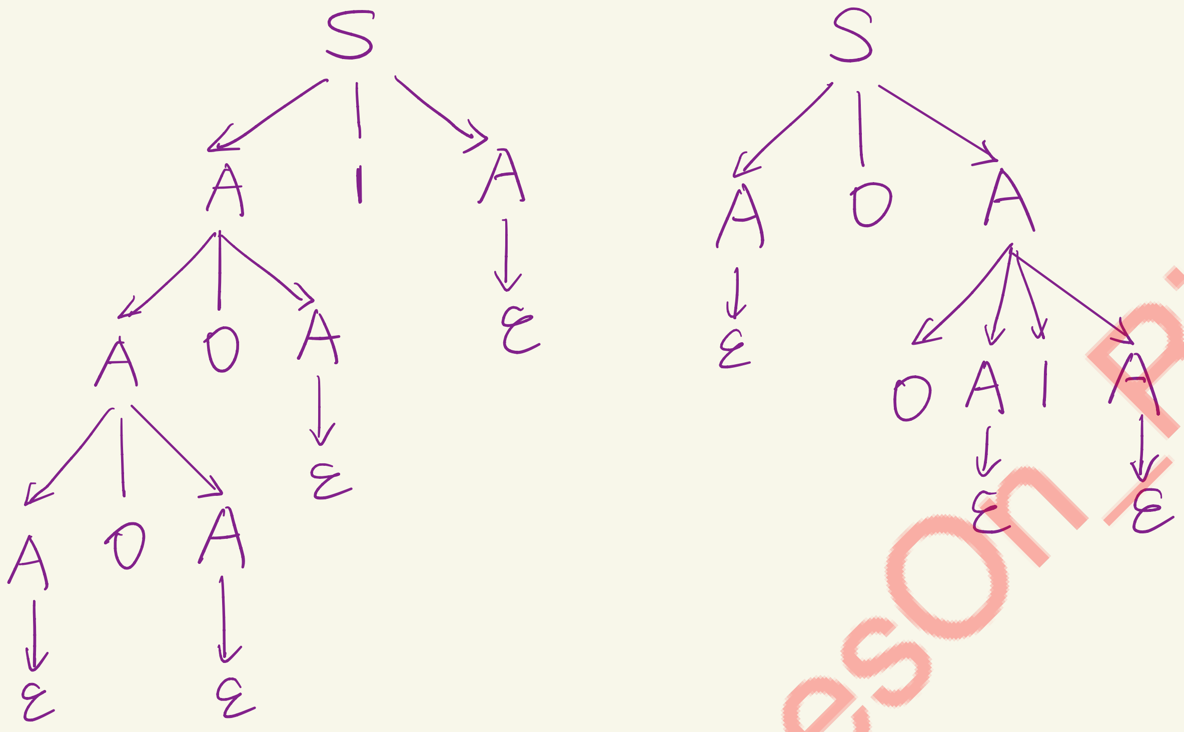
空スタックによる受理を行う決定性プッシュダウンオートマトン (deterministic pushdown automaton) によって，L_2 を認識することができるかどうか，理由と共に答えよ．

なお，プッシュダウンオートマトン $PDA = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q, Z)$ が決定性プッシュダウンオートマトンである必要十分条件は，以下の通りである．

- 任意の $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$ について $|\delta(q, a, X)| \leq 1$，かつ
- 任意の $q \in Q$, $X \in \Gamma$ について，$\delta(q, a, X) \neq \emptyset$ となる $a \in \Sigma$ があれば，$\delta(q, \varepsilon, X) = \emptyset$．

(5) 問 (4) における L_2 の例を，正則表現 (regular expression) を用いて一つ示せ．

(1) the parsing tree of 001 is not unique thus G_1 is ambiguous.



(2) $S \to 0A \mid 1A$

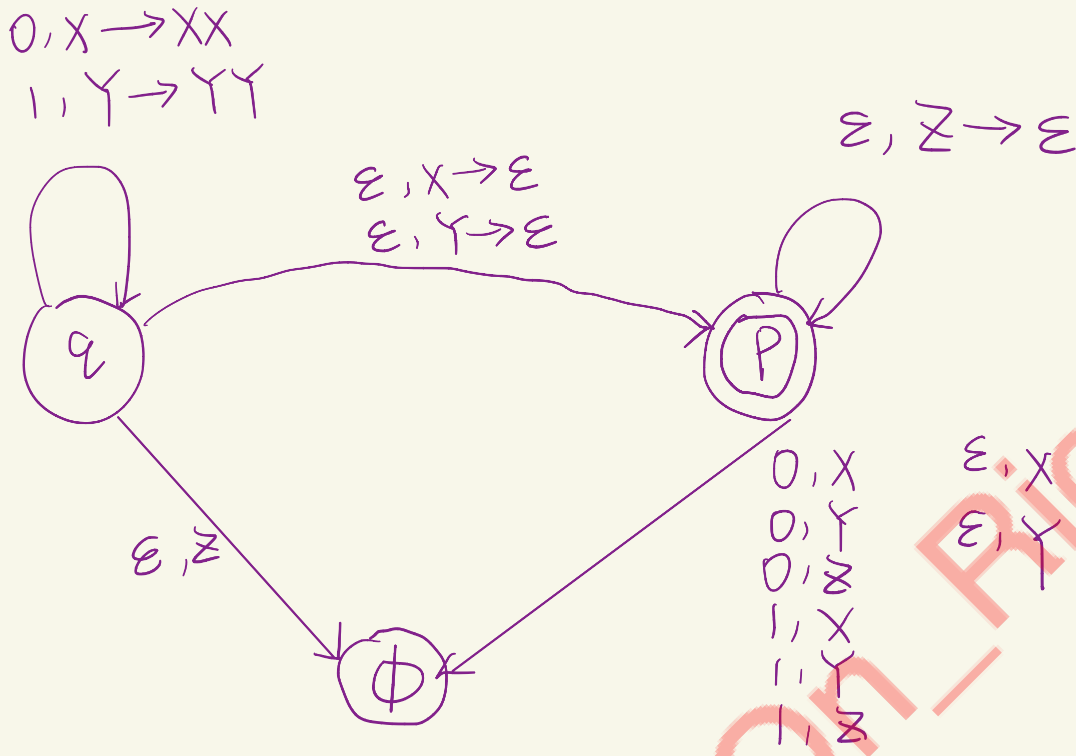
$A \to 0A1 \mid 1A0 \mid \varepsilon$

to eliminate ε-production

$S \to 0 \mid 1 \mid 0A \mid 1A$

$A \to 0A1 \mid 1A0 \mid 01 \mid 10$

(3)

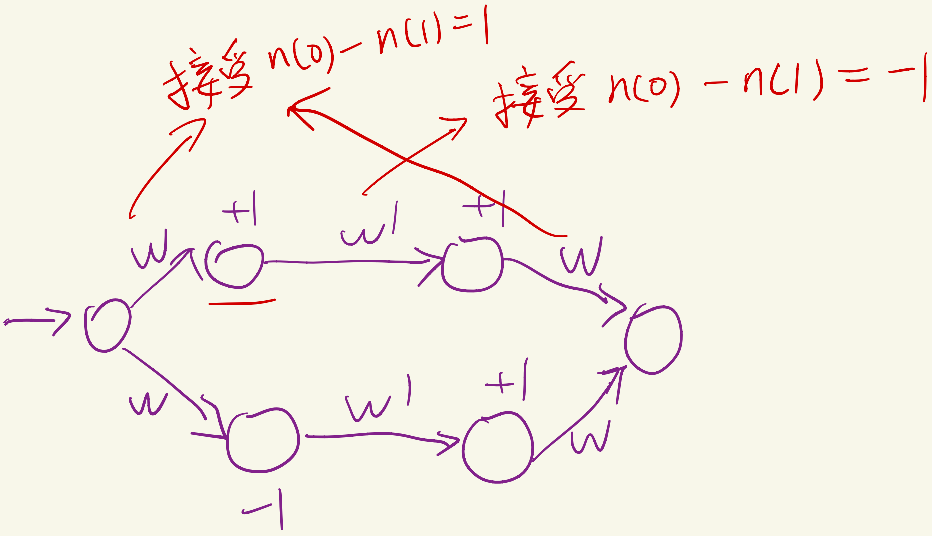


$$\delta_1(q, 0, Y) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$\delta_1(q, 0, Z) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta_1(q, 1, X) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$\delta_1(q, 1, Z) = \{(p, \varepsilon)\}$$



(4) Yes, we can design a PDA that recognize L_2. the PDA in (3) can recognize L_1, we can design a PDA that at the first stage recognize w, based on $n(0,w)-n(1,w) = 1$ or -1, if it is 1 then line up a PDA that recognize w' whose $n(0,w)-n(1,w) = -1$ and line up a PDA that recognize w in the following. The case for w that $n(0,w)-n(1,w)=-1$ is the same above.

(5) 例：$(010)^*(101)^*(010)^*$