専門基礎 A

A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6 , A-7, A-8, A-9 の9問から**4問**を選択して解答せよ。

Problem Set A

Choose and answer **4 questions** out of A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9.

A - 1

下記のすべての問に答えよ．(English translation is given on the next page.)

(1) 下記の問に答えよ．ただし，関数 $B(x,y)$ は次式で与えられる．

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,\ x>0,\ y>0$$

(a) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$xB(x,y+1) = yB(x+1,y)$$

(b) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(c) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{a}B\left(1-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$$

(2) 下記の問に答えよ．ただし，行列 A は次式で与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},\quad 0<p<1,\ 0<q<1$$

(a) n を正整数とする．A^n を求めよ．

(b) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(c) 次式で定義される $\exp(A)$ を求めよ．

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

ただし，A^0 は単位行列である．

continued on next page
次 頁 へ 続 く

(1)(a)

$$f_1 = xB(x, y+1) = x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt = \int_0^1 (1-t)^y\,dt^x$$

$$f_2 = yB(x+1, y) = y\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 -t^x\,d(1-t)^y$$

$$f_1 = (1-t)^y t^x\Big|_0^1 - \int_0^1 t^x\,d(1-t)^y$$

$$= 0 + f_2$$

$$= f_2$$

thus $xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$

(b) Let $t = \sin^2\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow B(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-2}\theta\ \cos^{2y-2}\theta\ d(\sin^2\theta)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\ \cos^{2y-1}\theta\ d\theta$$

(c) Set $u = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1+u}$; $\frac{dt}{du} = \frac{-1}{(1+u)^2}$

$$\Rightarrow B(x,y) = \int_\infty^0 (1+u)^{1-x} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{y-1} \cdot \frac{-1}{(1+u)^2}\, du$$

$$= \int_0^\infty (1+u)^{-(1+x)} \cdot u^{y-1} \cdot (1+u)^{1-y}\, du$$

$$= \int_0^\infty u^{y-1} (1+u)^{-(x+y)}\, du$$

$$\therefore \frac{1}{a} B\left(1-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_0^\infty u^{\frac{b}{a}-1} \cdot (1+u)^{-1}\, du$$

$$\xlongequal{u=t^a} \int_0^\infty \frac{1}{a} \frac{t^{b-a}}{1+t^a} \cdot a t^{a-1}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\, dt$$