第２問（数学）

次の行列 A の指数関数 $\exp A$ について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\alpha \text{ は実数，} \alpha > 0)$$

ただし，行列 X の指数関数 $\exp X$ は以下の式（指数級数）で定義される．

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots \qquad (E \text{ は単位行列})$$

（問１）行列 A の固有値 $\lambda_k\ (k = 1,2)$ とそれぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\vec{p}_k$ $(k = 1,2)$ を求めよ．

ただし，固有ベクトルは第一番目の要素の値をそれぞれ１とせよ．

（問２）固有ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を並べた行列 $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ の逆行列 P^{-1} を求めよ．

（問３）行列 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を，A と P を用いて表せ．

（問４）$\exp A$ を，$\lambda_k (k = 1,2)$ と P を用いて表せ．またその導出過程も示せ．

（問５）（問１），（問２）で求めた計算結果を用いて，$\exp A$ の各要素を求めよ．

（問６）ベクトル $\vec{x}$ に対して $(\exp A)\vec{x}$ は幾何学的に何を意味するか述べよ．

（問７）行列 X の固有値はすべて異なるものとしたとき，$\det(\exp X) = e^{Tr\,X}$ となることを，（問４）の結果を参考にして証明し，行列 A と（問５）の結果を用いて確認せよ．

ただし，$Tr\,X$ は行列 X のトレース（跡）で，対角要素の和である．

Q1. Set $Ax = \lambda x$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha i \quad , \quad \lambda_2 = -\alpha i$$

(i) when $\lambda_1 = \alpha i$

$$|A - \alpha i I| = \begin{vmatrix} -\alpha i & -\alpha \\ \alpha & -\alpha i \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

(ii) when $\lambda_2 = -\alpha i$

$$|A + \alpha i| = \begin{vmatrix} \alpha i & -\alpha \\ \alpha & \alpha i \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Q2. $p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$

$$[P \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow p^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix}$$

Q3. $AP = [AP_1 \quad AP_2] = P\Lambda$

$\Rightarrow \quad \Lambda = P^{-1}AP$

Q4. $\because \exp A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$

$A = P\Lambda P^{-1}$

$\therefore \exp A = E + P\Lambda P^{-1} + \frac{P\Lambda^2 P^{-1}}{2!} + \frac{P\Lambda^3 P^{-1}}{3!} + \cdots$

$= P\left(1 + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \cdots\right)P^{-1}$

$= P\begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\frac{\lambda_1^2}{2!}+\frac{\lambda_1^3}{3!}+\cdots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{2!}+\frac{\lambda_2^3}{3!}+\cdots \end{bmatrix}P^{-1}$

$= P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}P^{-1}$

$= P\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}P^{-1}$

Q5. $\exp A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix}$

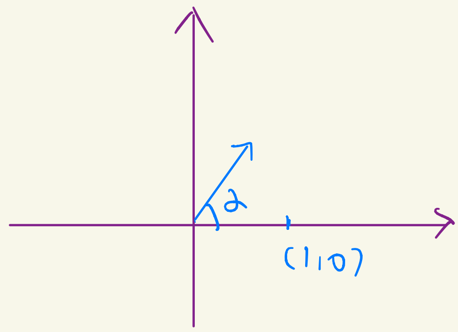
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} & \dfrac{-e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2i} \\ \dfrac{-ie^{i\alpha}+ie^{-i\alpha}}{2} & \dfrac{ie^{i\alpha}+ie^{-i\alpha}}{2i} \end{bmatrix}$$

According to Euler's Formula

$$\exp A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Q6. Let $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$(\exp A)\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$



$(\exp A)\vec{x}$ is to rotate $\vec{x}$ α degree counterclockwise.

Q7. we know $\operatorname{Tr} X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

suppose $X = P \Lambda P^{-1}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

then $\exp X = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$

$\Rightarrow \det(\exp X) = \det(P) \cdot \det(e^{\operatorname{Tr} X}) \cdot \det(P^{-1})$

$= \det(e^{\operatorname{Tr} X})$