平成２５年度　九州大学大学院システム情報科学府 情報学専攻 情報知能工学専攻 電気電子工学専攻

修士課程　入学試験問題

数 学 (Mathematics)

（7 枚中の 6）

> 6 分野のうちから 3 分野を選び解答すること．選んだ分野毎に解答用紙を別にすること．
> Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

---

5. 【確率・統計 (Probability and statistics) 分野】

以下の各問に答えよ．

(1) 正の整数値をとる確率変数 X は $\Pr[X = k] = \dfrac{2}{3^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を満たす．X の期待値を求めよ．

(2) 正の整数値をとる確率変数 Y は $\Pr[Y \geq k] = \dfrac{2}{k(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を満たす．Y の期待値を求めよ．

(3) 正の整数値をとる確率変数 Z は $\Pr[Z \geq k] \leq \dfrac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を満たす．Z の期待値が 2 より大きくなりうるかどうかを理由と共に答えよ．

Answer the following questions.

(1) Let X be a positive integer-valued random variable satisfying that $\Pr[X = k] = \dfrac{2}{3^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Find the expectation of X.

(2) Let Y be a positive integer-valued random variable satisfying that $\Pr[Y \geq k] = \dfrac{2}{k(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Find the expectation of Y.

(3) Let Z be a positive integer-valued random variable satisfying that $\Pr[Z \geq k] \leq \dfrac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Establish whether or not the expectation of Z can be larger than 2.

(1) $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ △

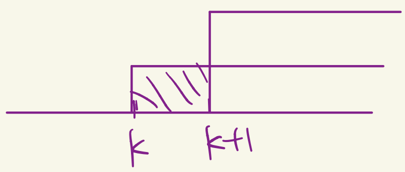
Let $x=\frac{1}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

thus $E(X)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{2}$

△注：用等差×等比数列求和也适用，但级数更快

(2)



$$P(Y=k)=P(Y\geq k)-P(Y\geq k+1)$$

$$=\frac{2}{k(k+1)}-\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(Y=k)=4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=2$$

thus $E(Y)=2$

(3) $P(Z \geq k) \leq \frac{1}{k^2}$, $P(Y \geq k) = \frac{2}{k(k+1)}$

$\because \frac{2}{k(k+1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2(k+1)} \geq 0$, $(k=1,2,\cdots)$

$\Rightarrow P(Y \geq k) \geq P(Z \geq k)$

$\Rightarrow E(Y) \geq E(Z)$ $\because E(Y) = 2$

$\Rightarrow E(Z) \leq 2$

$E(Z)$ is no larger than 2.