S1. k を 1 以上の整数とし，ガウス分布に従う実数の確率変数 X を考える．すなわち，x を X の実現値とすると，X の確率密度関数 $p_X(x)$ は

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{S1.1}$$

となる．ただし，m は実数の定数で平均値を表し，σ は正の定数で標準偏差を表すものとする．

以下の問では次の積分を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{S1.2}$$

なお，α は任意の正の実数である．

1) $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx$ の値を求めよ．

2) $\langle\ \rangle$ は集合平均を表し，確率密度関数を用いた平均操作とする．次式で表される $\langle(X-m)^{2k-1}\rangle$ の値を求めよ．

$$\langle(X-m)^{2k-1}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k-1} p_X(x)dx \tag{S1.3}$$

3) 式 (S1.3) を用いて，$\langle X\rangle$ の値を求めよ．

4) 式 (S1.2) の両辺を α について k 回微分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{\prod_{l=1}^{k}(2l-1)}{2^k} \pi^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{2k+1}{2}} \tag{S1.4}$$

を証明せよ．

5) 式 (S1.4) を用いて，$\langle(X-m)^{2k}\rangle$ の値を求めよ．

6) 5) の結果を用いて，$\langle X^2\rangle$ の値を求めよ．

7) $\langle X^3\rangle$ の値を求めよ．

1) $\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$, Let $\frac{x-m}{\sigma} = t$

$\Rightarrow x = \sigma t + m$, $dx = \sigma dt$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, Let $a = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$$

2) $\langle (x-m)^{2k-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$, let $\frac{x-m}{\sigma} = t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^{2k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^{2k-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$= \frac{\sigma^{2k-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$\because \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ is odd function

$$\Rightarrow \langle (x-m)^{2k-1} \rangle = \frac{\sigma^{2k-1}}{\sqrt{2\pi}} \times 0 = 0$$

3) from (S1.3) we know $\langle x-m \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x \rangle - \langle m \rangle = \langle x \rangle - m = 0$

$\Rightarrow \langle x \rangle = m$

4) $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} dx\right)^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-x^2)^k e^{-a x^2} dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-a x^2} dx$

$\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^{(k)} = \left(\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(k)} = \sqrt{\pi}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot \prod_{l=1}^{k}(2l-1)}{2^k} a^{-\frac{2k+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi}$

$\because \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} dx\right)^{(k)} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^{(k)}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-a x^2} dx = \frac{\prod_{l=1}^{k}(2l-1)}{2^k} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{2k+1}{2}}$

5) $\langle (x-m)^{2k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

Let $\frac{x-m}{\sigma} = t \Rightarrow dx = \sigma dt$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^{2k} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

From (S1.4), Let $a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\prod_{l=1}^{k}(2l-1)}{2^k} \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2k+1}{2}}$

$\Rightarrow \langle (x-m)^{2k} \rangle = \sigma^{2k} \prod_{l=1}^{k}(2l-1)$

6) $\langle (x-m)^2 \rangle = \langle x^2 - 2mx + m^2 \rangle$

$$= \langle x^2 \rangle - 2m\langle x \rangle + m^2$$

$$= \sigma^2$$

$\because \langle x \rangle = m$

$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = m^2 + \sigma^2$

7) $\langle x^3 \rangle = \langle (x-m)^3 + 3mx^2 - 3m^2x + m^3 \rangle$

$$= \langle (x-m)^3 \rangle + 3m\langle x^2 \rangle - 3m^2\langle x \rangle + m^3$$

$\because \langle (x-m)^3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x^3 \rangle = 3m\sigma^2 + m^3$