令和３年度　九州大学大学院システム情報科学府 情報理工学専攻 電気電子工学専攻

修士課程　入学試験問題

（令和２年１２月５日）

数 学 (Mathematics)

（7 枚中の 7）

6 分野のうちから 3 分野を選び解答すること．選んだ分野毎に解答用紙を別にすること．
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

---

6. 【確率・統計 (Probability and statistics) 分野】

実数 p は $0 < p < 1$ を満たすものとする．確率変数 X と Y は独立に同一の確率関数

$$f(k) = \begin{cases} p & (k = 1) \\ 1 - p & (k = -1) \end{cases}$$

に従うものとする．$Z = XY$ として，以下の各問に答えよ．

(1) 期待値 $\mathrm{E}[Z]$ を求めよ．

(2) X と Z の共分散 $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Z - \mathrm{E}[Z])]$ を求めよ．

(3) X と Z が独立となる p を求めよ．求めた p に対し，Y と Z も独立であることを示せ．

(4) (3) で求めた p に対し，確率 $\Pr[X + Y + Z \leq 2]$ を求めよ．

Let p be a real satisfying $0 < p < 1$. Let X and Y be independent random variables which respectively follow the identical probability function

$$f(k) = \begin{cases} p & (k = 1), \\ 1 - p & (k = -1). \end{cases}$$

Let $Z = XY$, and answer the following questions.

(1) Find the expectation $\mathrm{E}[Z]$.

(2) Find the covariance $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Z - \mathrm{E}[Z])]$ between X and Z.

(3) Find p such that X and Z are independent. Prove that Y and Z are also independent for the same p.

(4) Find the probability $\Pr[X + Y + Z \leq 2]$ for p obtained in (3).

(1) $E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y] = (E[X])^2$

$\because E[X] = p + (-1)(1-p) = 2p-1 = E[Y]$

thus $E[Z] = (2p-1)^2$

(2) $E[(X-E[X])(Z-E[Z])]$

$= E[XZ - XE[Z] - ZE[X] + E[X]E[Z]]$

$= E[XZ] - E[Z]E[X] - E[X]E[Z] + E[X]E[Z]$

$= E[X^2Y] - (2p-1)^3$

$= E[Y] - (2p-1)^3$

$= (2p-1) - (2p-1)^3$

(3) if X & Z are independent

$\mathrm{cov}(X,Z) = E[(X-E[X])(Z-E[Z])]$

$= (2p-1)[1-(2p-1)^2] = 0$

thus $p = \frac{1}{2}$ $(0<p<1)$

$\therefore \mathrm{cov}(Y,Z) = E[(Y-E[Y])(Z-E[Z])] = 0$

thus Y & Z are independent.

(4) $P[X+Y+Z \le 2] = 1 - P[X+Y+Z > 2]$

$\because P[X+Y+Z>2] = P[X+Y+XY>2]$

$= P[X=1, Y=1] = P[X=1]P[Y=1] = p^2 = \frac{1}{4}$

thus $P[X+Y+Z \le 2] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$