

数学 (Mathematics)

(7枚中の3)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にする事。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

2. 【微分方程式 (Differential equation) 分野】

関数 $y(x)$ の微分方程式

$$(x^4 - 1) \frac{dy}{dx} = y^2 + 2x^3y - 3x^2$$

について以下の問いに答えよ。

- 与えられた微分方程式は、 $y_p(x) = ax^3$ の形の特殊解を持つ。 $y_p(x)$ を求めよ。ただし a は定数とする。
- 特殊解 $y_p(x)$ と関数 $u(x)$ を用いて $y = y_p + \frac{1}{u}$ とおき、一般解を求めよ。

Consider the differential equation

$$(x^4 - 1) \frac{dy}{dx} = y^2 + 2x^3y - 3x^2$$

for a function $y(x)$. Answer the following questions.

- Find one of the particular solutions $y_p(x)$ of the form $y_p = ax^3$, where a is a constant.
- Obtain the general solution with the replacement $y = y_p + \frac{1}{u}$, where u is a function of x .

$$(1) \text{ Let } y = ax^3, \quad \frac{dy}{dx} = 3ax^2$$

$$\Rightarrow (x^4 - 1) \cdot 3ax^2 = a^2x^6 + 2ax^6 - 3x^2$$

$$\Rightarrow 3ax^6 - 3ax^2 = (a^2 + 2a)x^6 - 3x^2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$(2) y = x^3 + \frac{1}{u}, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow (x^4 - 1) \left(3x^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \right) = \left(x^3 + \frac{1}{u} \right)^2 + 2x^3 \left(x^3 + \frac{1}{u} \right) - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1-x^4}{u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4x^3}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{4x^3}{1-x^4} u = \frac{1}{1-x^4}$$

$$\Rightarrow u = e^{\int \frac{4x^3}{1-x^4} dx} \left(\int \frac{1}{1-x^4} e^{\int \frac{-4x^3}{1-x^4} dx} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{1-x^4} (x + c)$$

$$\Rightarrow y = x^3 + \frac{1-x^4}{x+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$